MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

On désigne par : $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des réels strictement positifs, $\mathbb{R}^*$ l'ensemble des réels non nuls, $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$ l'ensemble des entiers relatifs.

On donne une fonction g définie continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et un nombre réel λ non nul et tel que $0 < |\lambda| < 1$.

On se propose de chercher, dans certains cas, les fonctions f définies dans une partie D de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et solution de l'équation

$$(E) \qquad f(x) = f(\lambda x) + g(x) \qquad \textit{pour tout } x \in D .$$

I.

On cherche f définie sur $\mathbb{R}$, solution de (E), telle que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$; on dira qu'une telle solution est de type I.

1° Si $g = 0$, montrer que si f définie sur $\mathbb{R}$ vérifie (E) alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, on a $f(\lambda^n x) = f(x)$; que peut-on en conclure alors si f est de type I ?

2° On supposera désormais $g \neq 0$.

Montrer que si f définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) on a

$$(1) \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad f(x) = f(\lambda^{n+1} x) + \sum_{p=0}^{n} g(\lambda^p x)$$

En déduire que (E) a une solution de type I si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

$$C_0 \begin{cases} \text{la série } \sum_{p=0}^{\infty} g(\lambda^p x) \text{ converge pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \text{et } \lim_{x \to 0} \sum_{p=0}^{\infty} g(\lambda^p x) = 0 \end{cases}$$

Montrer qu'alors la solution de (E) de type I est unique.

3° Montrer que C_0 est vérifiée et déterminer explicitement l'unique solution de (E) de type I dans le cas où :

g est impaire, $g(0) = 0$ et $g(x) = x^\alpha \, e^{i \operatorname{Log} x}$ pour $x > 0$

($x \in \mathbb{R}_+^*$ donné)

(Distinguer les cas $0 < \lambda < 1$ et $-1 < \lambda < 0$).

4° On suppose que C_0 est vérifiée et on considère f l'unique solution de (E) de type I.

a. Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [-a, a] \quad |f(\lambda^{n_0} x)| < \varepsilon$$

b. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5° On suppose que g est dérivable au point 0 et que $g(0) = 0$.

a. Montrer qu'il existe une constante $A > 0$ et un voisinage V de 0 tel que

$$\forall x \in V \quad \text{on a} \quad |g(x)| < A\,|x| .$$

b. En déduire que C_0 est vérifiée.

c. Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall x \in]-\alpha, \alpha[\quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \left| \frac{g(\lambda^p x)}{\lambda^p x} - g'(0) \right| < \varepsilon$$

d. En déduire que f, l'unique solution de (E) de type I, est dérivable au point 0 et que $f'(0) = \dfrac{g'(0)}{1 - \lambda}$.

. . . / . . .

6° On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $g(0) = 0$ et que la dérivée g' de g est bornée sur tout intervalle borné de $\mathbb{R}$ et on considère f l'unique solution de (E) de type I.

a. Calculer $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en appliquant la formule des accroissements finis à g.

b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$f'(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \lambda^p \, g'(\lambda^p \, x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II

On suppose $0 < \lambda < 1$ et on cherche f définie sur $\mathbb{R}_+^*$, solution de (E), telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; on dira qu'une telle solution est de type II.

1° Montrer que (E) a une solution de type II si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

C_1 : la série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} g\left(\dfrac{x}{\lambda^p}\right)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{p=1}^{\infty} g\left(\dfrac{x}{\lambda^p}\right) = 0$

Montrer que cette solution est unique et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2° On suppose que g est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, qu'il existe $\beta > 1$ et $K > 0$ tels que $|g'(x)| \leqslant \dfrac{K}{x^\beta}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

a. Montrer que $g(x) = \int_{+\infty}^{x} g'(t)\,dt$ et majorer $\left| g\left(\dfrac{x}{\lambda^p}\right)\right|$.

b. En déduire que la condition C_1 est vérifiée.

c. Montrer que l'unique solution f de (E) de type II est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

III

On suppose que $0 < \lambda < 1$ et que g vérifie les conditions C_1 et C_0 ; on considère f l'unique solution de (E) de type I et F l'unique solution de (E) de type II, et on définit φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = f(x) - F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1° Que peut-on dire de φ? Montrer que φ est déterminé par ses valeurs sur $]\lambda, 1]$. En déduire que f et F sont bornés sur $\mathbb{R}_+^*$.

2° Montrer que C_0 et C_1 sont vérifiées et déterminer explicitement φ dans le cas où :

$g(x) = x^\alpha$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $g(x) = x^{-\alpha}$ pour $x \geqslant 1$ ($\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ donné).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail